KANT AND THE PROBLEM OF MATHEMATICAL JUDGEMENTS

Mircea Oancea
Prof., PhD, Politehnica University of Bucharest

Abstract: The epistemological problem of Kant is to determine the type of mathematical judgment. What is possible the pure synthetic mathematical statements as the a priori statements? What is possible that 12 = 7 + 5?
The mathematical judgment is not analytical tautological judgments. But the mathematical judgment has not the same propriety with other syntactical judgment (the existence judgments). These judgments are in logical view, the ordinary judgments. We find the solution for these problems in the levels of validities of modal logic.

Keywords:Modal, level, apiori, validity, model, logic

Problema fundamentală epistemologică a lui Kant constă în determinarea tipului judecăților matematice. Cum sunt posibile judecățile sintetice apriori ale matematicii pure? Cum este posibil ca

12 = 7 + 5?

Judecățile matematice nu sunt judecăți analitice, care sunt tautologii, și în care conexiunea subiectului cu predicatul este gândită ca identitate(ca în orice tautologie).[1]

Dar judecățile(propozițiile matematice) nu au aceleași proprietăți ca și celelalte propoziții sintetice(implicative, de existență, etc.) care există în celelalte domenii ale științei. Și care din punct de vedere logic sunt propoziții oarecare. Ele nu sunt tautologii, deci nu sunt universal adevărate, ci sunt doar valide într-un domeniu(într-un model logic, formalizat, al unei teorii științifice). Cel care le garantează validitatea, ca axiome(principii) va răspunde cu propria prestanță dacă axiomele se dovedesc a fi false. O axiomă sau o teoremă validă într-o teorie științifică, în altă teorie, poate fi adevărată, sau falsă, sau lipsită de sens.

Propozițiile matematice formal(formalizate) sunt formule oarecare, ca și celelalte propoziții ale științei, dar proprietățile lor nu sunt ale unei formule oarecare. Deci denumirea oferită de Kant, pentru judecățile matematice, nu este o rezolvare, ci doar o clarificare negativă a domeniului: propozițiile matematice, deci propozițiile sintetice apriori nu au proprietățile propozițiilor sintetice, după cum, după formă nu sunt tautologii(propoziții analitice). Clarificare negativă a domeniului de definiție indică faptul că el intuia, în mod corect că nu se poate rezolva problema în timpul său. Și deci definiția este impunerea ei ca problemă care va putea fi rezolvată în viitor. Intuiția lui Kant era corectă: problema sa nu putea fi rezolvată înainte de a fi creată

- *logica predicatelor* de către Frege, și nu putea fi rezolvată înainte de crearea
- *logicii modale clasice* de către Lewis, și nu putea fi rezolvată decât după crearea
- *ierarhiei domeniilor și sistemelor modale*, realizată de noi.[2]

[1]Kant, Critica rațiunii pure, Ed. IRI, B., 1998, p-56.
[2] Oancea M., Domenii și sisteme ale logicii modale, Ed. Printech, B., 2015, p-5.

Primul nivel al logicilor modale, în care se pot construi domenii și sisteme este nivelul tautologic. Noi am demonstrat teorema fundamentală a acestui nivel: Toate tautologiile primare(în forma tautologică explicită) ale logicilor modale provin din tautologii ale logicii propozițiilor prin substituții.

Deci în logicile modale nu se pot construi tautologii primare(în forma tautologică explicită) proprii, care să nu provină din logica propozițiilor prin substituție. În acest nivel, ca și în oricare altul putem construi domenii nivelare(care reprezintă o mulțime consistentă de reguli, principii și norme și chiar formule) care permit în interiorul lor construcția de sisteme.

În ierarhia nivelurilor, domeniilor și sistemelor, funcționează principiul ierarhic: formulele acceptate ca valide la un anumit nivel, își mențin calitatea la toate nivelurile inferioare.

Nivelul tautologic, are un sub-nivel, pe care l-am numit kantian, pentru că el conține soluția problemei kantiene. Și l-am numit sub-nivel pentru că se poate nu numai coborî de la nivelul tautologic la sub-nivelul kantian, dar se poate și urca de la sub-nivelul kantian la nivelul tautologic, prin utilizarea substituției de echivalente cu ajutorul definiției functorilor. După caracteristici, am definit sub-nivelul kantian, ca fiind general valid dependent de definiția functorilor(GVDF) sau sub-nivelul formulelor care au puterea unei tautologii dar formal(după formă) nu provin dintr-o tautologie propozițională. Mai numim aceste formule PT(formule cu puterea unei tautologii).

Iar în final numim aceste formule și tautologii secundare. Tautologiile primare sunt obținute direct din logica propozițiilor prin substituție. Tautologiile secundare, pot fi și ele obținute prin substituție dar în formule oarecare propoziționale. Și pentru că din formule oarecare propoziționale, prin substituții obținem toate celelalte tipuri valide(formule general valide[3], formule semi-general valide, formule oarecare) rezultă că ele nu pot fi definite prin această procedură. Procedura de definiție trebuie să funcționeze numai pentru acel tip. Deci singura procedură corectă de definire a tautologiilor secundare este: selectăm o tautologie primară și realizăm în ea substituția de echivalente care este permisă de definiția functorilor. Deci definiția functorilor este constructorul tautologiilor secundare pornind de la tautologiile principale.

Aici apare conceptul fundamental de validitate: tautologiile sunt universal adevărate, în orice freim(cadrul) și în afară oricărui cadru, deci redau un adevăr ne-condiționat, care se realizează prin structura proprie a formulei. Validitatea este dependentă de definiție, de teorie, de sistem, de context, deci este un adevăr condiționat.
Definițiile functorilor modali
Lp=-M-p,
Mp=-L-p,
apar înainte de a se construi ierarhia, nivelurile, domeniile nivelare și sistemele modale, în ceea ce se numește sistemul generator de limbaj(SGL).
Considerând o tautologie modală(aparținând nivelului tautologic) și realizând o substituție de echivalente cu ajutorul definiției, trecem la o formulă care aparține sub-nivelului kantian, pe care o numim *tautologie secundară*. Spre exemplu, considerând tautologia modală
Lp>Lp
și realizând substituția de echivalente, pentru antecedent, obținem formula
-M-p>Lp

[3] *Mircea Oancea, Axiomatizări gödeliene în domeniul K, Ed. Printech, B., 2018, p*-6.

Această formulă, provine întâmplător și din substituția în formula oarecare
p>q,
a lui p cu -M-p și a lui q cu Lp.
Deci formal, această propoziție nu este o tautologie. Dar aplicând invers definiția functorului, obținem din nou tautologia primară(urcăm la nivelul tautologic).
Dar formula
-M-p>Lp
este real și oarecare? Orice încercarea de a o demonstra ca fiind nevalidă în cel puțin un sistem modal individual meta-axiomatizabil eșuează. Deci ea are puterea unei tautologii fără să fie formal o tautologie și am denumit-o tautologie secundară. Acesta este exact soluția așteptată de Kant. În sistemul generator de limbaj(SGL) al matematicii există definiția functorilor X= Y + Z.
O instanța a ei este 12= 7 + 5.
Formula matematică
12=12
este o tautologie, și deci participă la nivelul tautologic matematic.
Să aplicăm definiția functorilor, celui de-al doilea 12 din tautologia matematică și vom obține formula
12= 7 + 5.
Această formulă nu este o tautologie pentru că provine din substituția într-o formulă oarecare. Dar aplicându-i invers definiția functorilor, obținem din nou tautologia. Iar această formulă are puterea unei tautologii ca și formula logică.
Deci soluția problemei kantiene consta în comportamentul identic al formulelor matematice, cu al celor logice, în sub-nivelul kantian. Dar definițiile sunt utilizate în toate celelalte domenii ale științei.
Să considerăm definiția aristotelică a omului: omul este animal politic. Formalizăm această definiția la nivelul operatorial[4]:
OM=ANIMAL & POLITIC.
Introducem această definiție în sistemul generator de limbaj(SGL) și obținem prima tautologie în domeniul tautologic al științelor sociale:
OM=OM
Aplicând definiția functorilor pentru termenul din dreapta obținem formula
OM=ANIMAL & POLITIC.
Aplicând invers definiția functorilor(realizăm substituția de echivalente), revenim în nivelul tautologic al științelor sociale.
Dar formula
OM=ANIMAL & POLITIC.
aparține sub-nivelului kantian? Dacă ar aparține, Kant ar spune că atunci propozițiile matematice nu ar fi deosebite de propozițiile sintetice din celelalte domenii ale științei. Dar tocmai denumirea lor ca judecăți sintetice apriori, exprimă ideea că au ceva deosebit față de celelalte, care nu sunt decât judecăți sintetice, oarecare.
Formula logică
-M-p>Lp
are puterea unei tautologii pentru că este imposibil de a descoperi un sistem modal individual meta-axiomatizabil în care formula să fie ne-validă.

[4] Mircea Oancea, Domenii și sisteme ale logicii modale, Ed. Printech, B., 2015, p-3.

Propoziția
12=7+5
are puterea unei tautologii, pentru că este imposibil să existe sau ca matematicienii să creeze o teorie(echivalentă cu un sistem modal individual meta-axiomatizabil sau cu un sistem grupal) în care această formulă să fie ne-validă.
Dar pentru formula
OM=ANIMAL & POLITIC
din domeniul științelor sociale, putem construi o teorie în care această formulă să fie falsă.
Deci asemănarea, dintre teoriile logice și matematice și cele ale celorlalte științe, care constă în faptul că utilizează definiții, nu este o garanție a dispariției diferenței. Deci poate urca la nivel tautologic și o formulă oarecare prin aplicarea definiției functorilor. Acest fapt ne permite să precizăm principiul piramidal: și o formulă oarecare poate urca la nivel tautologic, dacă functorul are o definiție în sistemul generator de limbaj(SGL).
Și precizăm și teorema tautologiile: se pot crea formule cu puterea tautologiei, formule secundare, în sub-sistemul kantian, dacă există definiții ale functorilor, prin substituții de echivalență în tautologiile principale.
Iar diferența constă în plasarea formulelor în niveluri: formulele kantiene, logice și matematice se plasează în sub-nivelul kantian, iar formulele celorlalte domenii ale științei se plasează la nivelul grupal sau individual meta-axiomatizabil. Modelul ierarhic este:

- Nivelul tautologic
- Sub-nivelul kantian(nivelul general valid dependent de definiția functorilor)
- Nivelul Lewis(nivelul general valid dependent de freimuri(cadre))
- 2 niveluri semi-general valide, natural și creativ
- nivelul grupal
- nivelul individual meta-axiomatizabil.[5]

Deci cauza acestui comportament diferit, al formulelor matematice față de formulele din celelalte domenii ale științei, constă în faptul că teoriile matematice ocupă în ierarhia domeniilor și nivelurilor sub-nivelul kantian (și nivelul general valid, pe care l-am numit C. Lewis în onoarea creatorului logicii modale, prin proprietățile lor fundamentale numite valuări), iar teoriile celorlalte științe se plasează în nivelul semi-general valid grupal natural sau individual meta-axiomatizabil natural, iar formula obținută prin definiția functorilor coboară exact la nivelul în care se află teoria în care este folosită.
Iar întrebarea: de ce matematica(teoriile matematice) ocupă sub-nivelul Kantian și nivelul Lewis? este forma finală a problemei kantiene: logica și matematica sunt cele două științe ale absolutului. Deci ele sunt singurele științe care pot conceptualiza și teoretiza mulțimi nenumărate de sub-mulțimi infinite. Conform interpretării metafizice, matematica conceptualizează infinitul cantitativ, iar logica conceptualizează infinitul calitativ(un infinit guvernat strict de regulile de construcție). Și tocmai pentru că ele conceptualizează infinitul, le este atât de ușor să înțeleagă finitul, să fie pentru celelalte științe organon, cum spunea Aristotel. Toate celelalte științe sunt captive în finitatea domeniului lor de definiție, sunt deci științe locale. Și deci fără logică și matematică ele rămân în lumea finitului ca simplă opinie(doxa cum spunea Platon). Dar a înțeles Kant, esența problemei, care nu putea fi rezolvată pentru că nu erau create logicile modale ale ierarhiei nivelurilor, domeniilor nivelare și sistemelor? Da a înțeles-o:
Fiecare domeniu al cunoașterii are atâta știință câtă (logică și) matematică are![6]

[5] Oancea M., Domenii și sisteme ale logicii modale, Ed. Printech, B., 2015, p-74.

BIBLIOGRAPHY

1. I. Kant, Critica rațiunii pure, Ed. IRI, B., 1998.
2. L. Blaga, Experimentul și spiritul matematic, Humanitas, B., 1998.
3. Mircea Oancea, Domenii și sisteme ale logicii modale, Ed. Printech, B., 2015.
4. Mircea Oancea, Axiomatizări gödeliene în domeniul K, Ed. Printech, B., 2018.

[6] L. Blaga, Experimentul și spiritul matematic, Humanitas, B., 1998, p-99.